

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Komar

IDENTIFIKACIJA DINAMIČKIH
SUSTAVA METODOM NAJMANJIH
KVADRATA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zlatko Drmač

Zagreb, Rujan, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj	iii
Uvod	1
1 Dinamički sustav i prostor stanja	2
1.1 Osnovni pojmovi	2
1.2 Primjeri jednadžbi u prostoru stanja	4
2 Svojstva dinamičkih sustava	9
2.1 Upravljivost dinamičkog sustava	10
2.2 Osmotrivost dinamičkog sustava	14
2.3 Numeričke poteškoće s teorijskim kriterijem upravljivosti i osmotrivosti .	15
2.4 Stabilnost dinamičkog sustava	17
3 Prijelaz iz vremenske domene u frekvencijsku domenu	21
3.1 Laplaceova transformacija	21
3.2 Matrica prijelaza stanja	23
3.3 Frekvencijska matrica	24
4 Veza između ulaza i izlaza- funkcija prijelaza	27
5 Racionalna aproksimacija u smislu najmanjih kvadrata	29
5.1 Metoda najmanjih kvadrata	29
5.2 Sanathanan- Koerner iteracije	31
5.3 Vector fitting iteracije (VF)	33
5.4 Realokacija nestabilnih polova	35
6 Implementacija metode i prikaz rezultata	36
6.1 Greška aproksimacije	36
Bibliografija	39

Uvod

Jedan od glavnih zadataka primijenjene matematike jest prevođenje promatrane fizikalne pojave u matematički model. To najčešće znači pretvaranje dostupnih informacija, dobivenih mjerenjem u sustav jednačbi koje opisuju taj problem. Te jednačbe mogu biti linearne, diferencijalne, nelinearne, i sl. Ponekad su te jednačbe zapisane u kompliciranom obliku, kao što je npr. sustav diferencijalnih jednačbi velike dimenzije. S njima ne možemo efikasno raditi na računalu. Stoga je ponekad potrebno kompliciranije jednačbe svesti na jednostavnije raznim transformacijama kako bismo problem sveli na više jednostavnijih jednačbi koje znamo riješiti običnim algebarskim operacijama. Konkretnije, kao matematički model promatranog fizikalnog problema, dobit ćemo sustav diferencijalnih jednačbi prvog ili višeg reda. Njih ćemo Laplaceovim transformacijama prebaciti u sustav algebarskih jednačbi, pri čemu će nam od važnosti biti funkcija prijelaza koju ćemo kasnije objasniti. Funkcija prijelaza nam omogućava da nakon izvršavanja algoritma odgovarajućim metodama dobivene rezultate prebacimo natrag u oblik diferencijalnih jednačbi, što će nam dati približno rješenje početnog sustava. U ovom radu ćemo definirati dinamički sustav i pojmove vezane uz njega, te dati fizikalne primjere gdje se on koristi. Dinamički sustav je sustav diferencijalnih jednačbi koje opisuju naš matematički model i iz kojih možemo iščitati rješenje promatranog problema u svakom vremenskom trenutku. Ako naš dinamički sustav opisuje gibanje satelita, mi smo u mogućnosti iz sustava iščitati poziciju satelita u bilo kojem vremenskom trenutku. Na kraju ćemo opisati metodu racionalne aproksimacije u smislu najmanjih kvadrata kojom iterativno rješavamo naš sustav, te ćemo u programskom paketu MATLAB predstaviti dobivene rezultate i vidjeti kako metoda radi u praksi.

Poglavlje 1

Dinamički sustav i prostor stanja

U ovom poglavlju dat ćemo neke osnovne definicije dinamičkog sustava, te primjere jednostavnih gibanja opisanih u prostoru stanja.

1.1 Osnovni pojmovi

Dinamički sustav je sustav diferencijalnih jednadžbi koji opisuje dinamiku promatrane fizikalne pojave. Promotrimo dinamički sustav definiran sljedećim sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(t_0) = x_0 \quad (1.1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.1.2)$$

Varijable predstavljaju

- $x(t)$ je n -dimenzionalni vektor, **stanje sustava**
- $u(t)$ je m - dimenzionalni vektor ($m \leq n$), **ulaz (kontrola)**
- $y(t)$ je r -dimenzionalni vektor, **izlaz (opažanje)**

Vektor $x(t_0)$ je početni uvjet sustava. Komponente vektora $x(t)$ su varijable stanja. Matrice A, B, C i D su konstantne u vremenu t , redom dimenzija $n \times n, n \times m, r \times n$ i $r \times m$. Ovakva reprezentacija sustava naziva se vremenski invarijantan **neprekidan dinamički sustav u prostoru stanja**. U zadanom trenutku t , varijable koje ulaze u sustav su ulazne varijable (input), one unutar sustava tvore stanje, dok sve ostale koje se mogu izmjeriti direktno tvore izlaz (output).

Definicija 1.1.1. *Prostor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ u kojem se nalaze sva stanja za svaki $t \geq 0$ zove se **prostor stanja**, jednađba (1.1.1) zove se **jednađba stanja**, a jednađba (1.1.2) zove se **izlazna (output) jednađba ili jednađba opažanja**.*

Ako je $m = r = 1$, sustav se zove **single-input single-output (SISO) sustav**. Njime ćemo se baviti u narednim poglavljima. Analogno se definira **multi-input multi-output (MIMO) sustav**.

Postoje dva pristupa modeliranju i analizi linearnih sustava:

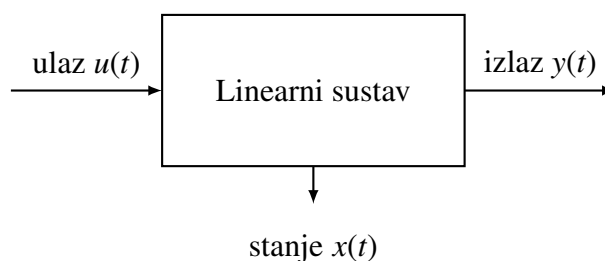
- vremenska domena
- frekvencijska domena

U vremenskoj domeni se nalaze diferencijalne jednađbe prvog reda koje opisuju matematički model promatranog problema. Za numeriku nam treba nešto drugačiji pristup zbog ograničenosti računala. Stoga diferencijalne jednađbe iz vremenske domene prevodimo u frekvencijsku domenu u kojoj se koriste osnovne algebarske operacije. Dakle, sa kompliciranog zapisa diferencijalnih jednađbi prelazimo na zbrajanje i množenje. Kasnije ćemo pojasniti kako to radimo. Pojam stanja dinamičkog sustava je glavni pojam u fizici. Bitno je imati na umu da je evolucija dinamičkog procesa u potpunosti određena njegovim trenutnim stanjem. To možemo shvatiti kao bazu za apstraktnu definiciju stanja dinamičkog sustava:

Definicija 1.1.2. *Stanje dinamičkog sustava je skup fizikalnih veličina čije specifikacije u potpunosti određuju evoluciju sustava.*

Ponašanje dinamičkog sustava općenito je zadano sustavom običnih diferencijalnih jednađbi; kažemo da one tvore **matematički model** fizikalnog procesa. Ponašanje fizikalnog procesa predviđamo rješavanjem diferencijalnih jednađbi koje modeliraju taj proces. Kako bismo dobili rješenje tog sustava, potrebno je zadati **skup početnih uvjeta**. Broj potrebnih početnih uvjeta definira **red sustava**. Dinamičke varijable koje se pojavljuju u sustavu jednađbi prvog reda zovu se **varijable stanja**. Shematski, model dinamičkog sustava prikazan je na Slici 1.1.

Slika 1.1

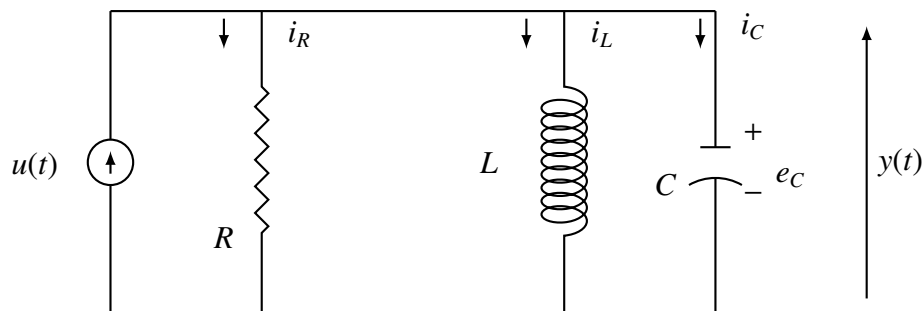


1.2 Primjeri jednadžbi u prostoru stanja

Promotrimo sljedeće primjere koji ilustriraju prostor stanja nekih jednostavnih sustava.

Primjer 1.2.1. (*Paralelni RLC krug*). Promotrimo paralelni RLC krug pobuđen izvorom struje $u(t)$ sa izlazom $y(t)$ (Slika 1.2).

Slika 1.2



- R = otpor
- L = induktivnost
- C = kapacitet
- $u(t)$ = ukupna struja kroz izvor
- i_R = struja kroz otpornik
- i_L = struja kroz zavojnicu
- i_C = struja kroz kondenzator
- e_C = napon

Kirchhoffov prvi zakon nam daje $i_R + i_L + i_C - u(t) = 0$.

Ohmov zakon kaže da je jakost struje u strujnom krugu proporcionalna naponu, a obrnuto proporcionalna otporu, odnosno $e_C = Ri_R = L \frac{di_L}{dt}$.

Struja ovisi o brzini promjene napona na kondenzatoru i o njegovom kapacitetu, odakle imamo $i_C = C \frac{de_C}{dt}$.

Odatle dobivamo sljedeće jednadžbe strujnog kruga:

$$u = i_R + i_L + i_C; \quad i_C = C \frac{de_C}{dt}; \quad e_C = L \frac{di_L}{dt} = Ri_R$$

Definirajmo stanja sa $x_1 := i_L$ i $x_2 := e_C$.

Slijedi:

$$\begin{aligned} e_C &= L\dot{x}_1 = Ri_R \\ \Rightarrow \dot{x}_1 &= \frac{e_C}{L} = \frac{x_2}{L} \\ \Rightarrow i_R &= \frac{x_2}{R} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$\begin{aligned} i_C &= C\dot{x}_2 \\ \Rightarrow \dot{x}_2 &= \frac{i_C}{C} = \frac{u - i_R - i_L}{C} = \frac{u - i_R - x_1}{C} = \\ &= \frac{u - \frac{x_2}{R} - x_1}{C} = \frac{u}{C} - \frac{x_2}{RC} - \frac{x_1}{C} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Jednadžbe stanja i izlaza su

$$\dot{x} = Ax + bu; \quad y = cx$$

gdje je $x = [x_1, x_2]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix}, \quad c = [0, 1].$$

Primjer 1.2.2. (Sustav masa na oprugama). Jednadžbe ovog gibanja reprezentirane su diferencijalnim jednadžbama drugog reda. Pokazat ćemo kako se one prevode u diferencijalne jednadžbe prvog reda u prostoru stanja. Promotrimo sustav opruga prikazan na Slici 1.3. Koeficijenti rastezanja obje opruge jednaki su k , a mase redom m_1 i m_2 . Na masu m_1 primijenjena je sila f_1 , a na masu m_2 sila f_2 .

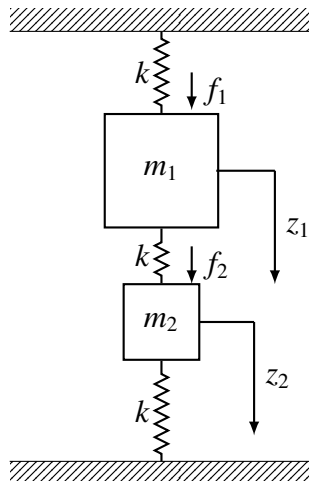
Jednadžbe gibanja ovog sustava su:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1(t) + k[z_1(t) - z_2(t)] + kz_1(t) &= f_1(t) \\ m_2 \ddot{z}_2(t) - k[z_1(t) - z_2(t)] + kz_2(t) &= f_2(t) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1(t) \\ \ddot{z}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

Slika 1.3



Stavimo:

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

Tada imamo

$$M\ddot{z}(t) + Kz(t) = f(t),$$

gdje je

$$M = \text{diag}(m_1, m_2); \quad K = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}; \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

Napravimo sljedeću zamjenu varijabli:

$$x_1(t) = z(t); \quad x_2(t) = \dot{z}(t);$$

U terminima novih varijabli, jednadžbe gibanja postaju

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ M\dot{x}_2(t) &= -Kx_1(t) + f(t) \end{aligned}$$

odnosno matrično

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} f(t) \quad (1.2.5)$$

gdje je

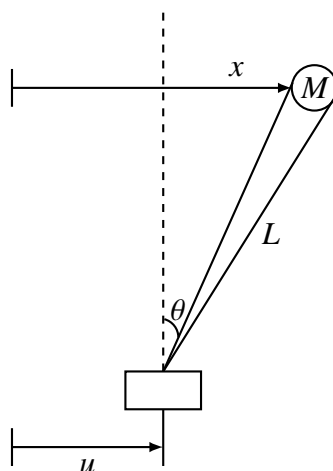
$$x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T = [z(t), \dot{z}(t)]^T$$

Jednadžba (1.2.5) je reprezentacija sustava ODJ drugog reda (1.2.4) u ODJ prvog reda.

Primjer 1.2.3. (Balansiranje štapa). Promotrimo jednostavan problem balansiranja štapa na ruci, kao na Slici 1.4. Varijabla L predstavlja duljinu štapa, M je masa štapa koncentrirana na vrhu. Ulazna varijabla $u(x)$ je pozicija ruke. Tada je pozicija vrha štapa dana sa

$$x(t) = L \sin \theta(t) + u(t)$$

Slika 1.4



Okretni moment (sile koja utječe na rotaciju tijela) zbog djelovanja gravitacije na masu je $MgL \sin \theta(t)$. Moment inercije mase na štapu je $ML^2\ddot{\theta}(t)$. Pomak momenta inercije je $\ddot{u}(t)ML \cos \theta(t)$.

Slijedi jednadžba gibanja

$$MgL \sin \theta(t) = ML^2\ddot{\theta}(t) + \ddot{u}(t)ML \cos \theta(t).$$

U sljedećoj tablici navodimo fizikalne veličine i mjerne jedinice iz gornje formule.

Tablica 1.1: Fizikalne veličine i pripadne mjerne jedinice

fizikalna veličina	mjerna jedinica
M =masa	kg
g =gravitacijsko ubrzanje	$\frac{m}{s^2}$
L =duljina štapa	m
$\theta(t)$ =kut otklona od vertikalne osi	rad
$\ddot{\theta}(t)$ =kutno ubrzanje	$\frac{rad}{s^2}$
$u(t)$ =pozicija ruke	m
$\ddot{u}(t)$ =horizontalno ubrzanje	$\frac{m}{s^2}$

Uočimo da se fizikalne veličine $\sin \theta(t)$ i $\cos \theta(t)$ također izražavaju u radijanima.

Gornje jednačbe su očito nelinearne. Linearizirat ćemo ih uz pretpostavku da θ ima malu vrijednost. Tada vrijedi $\cos \theta(t) \approx 1$ i $\sin \theta(t) \approx \theta(t)$. Slijedi

$$x(t) = L\theta(t) + u(t) \quad (1.2.6)$$

i

$$MgL\theta(t) = ML^2\ddot{\theta}(t) + \ddot{u}(t)ML. \quad (1.2.7)$$

Izrazimo $\theta(t)$ iz jednačbe (1.2.6):

$$\theta(t) = \frac{x(t) - u(t)}{L}$$

odakle slijedi

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{\ddot{x}(t) - \ddot{u}(t)}{L}.$$

To uvrstimo u jednačbu (1.2.7) i dobijemo

$$\ddot{x}(t) = (g/L)(x(t) - u(t)).$$

Uz zamjenu $v(t) = \dot{x}(t)$, sustav možemo zapisati u obliku običnih diferencijalnih jednačbi prvog reda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{L} \end{bmatrix} u(t).$$

Poglavlje 2

Svojstva dinamičkih sustava

Pozabavimo se našim sustavom jednačbi (1.1.1) i (1.1.2):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Prisjetimo se, vektor u zovemo ulazni (input) vektor, vektor x je vektor stanja sustava, a vektor y zovemo vektor opažanja (output). Uočimo da su to vektori u matematičkom smislu, ali ne nužno i u fizikalnom. Na primjer, komponente fizikalnog vektora su općenito projekcije fizikalne veličine (brzine, sile) duž koordinatnih osi. Komponente vektora stanja dinamičkog sustava općenito nemaju ovu reprezentaciju i ne moraju uopće predstavljati isti tip fizikalnih veličina. Iz prethodnih primjera je vidljivo da smo u komponente vektora stanja stavili položaj i brzinu promatranog objekta.

Budući da promatramo vremenski invarijantan sustav, matrice A, B, C i D su konstantne matrice, odnosno ne ovise o vremenskoj varijabli t . Prisutnost matrice D u jednačbi (1.1.2) znači da postoji direktna veza između ulaza $u(t)$ i izlaza $y(t)$, bez intervencije stanja $x(t)$. Najčešće u matematičkim modelima matricu D ne koristimo, što dodatno olakšava numeriku problema. Stoga ćemo u većini budućeg promatranja dinamičkog sustava pretpostaviti da je $D = 0$.

Vektor ulaza u reprezentira skup svih fizikalnih veličina koje utječu na ponašanje stanja. Postoje dva tipa ulaza: kontrolirani ulaz i "egzogeni" ulaz. Egzogeni ulaz je obično prisutan u fizikalnoj okolini promatranog problema (npr. sila trenja) i ne možemo ga kontrolirati unutar sustava, što nije od interesa našeg razmatranja. Mi ćemo se koristiti samo kontroliranim ulazom budući da promatramo sustav u kojem je u praksi jedina dostupna informacija niz vrijednosti dobivenih mjerenjem.

Budući da dinamičkim sustavom opisujemo gibanja koja se događaju u fizikalnom, realnom svijetu, bitno je da naš matematički model (pa tako i sustav dobiven iz njega) što vjernije opisuje promatrane realne fizikalne pojave. Izraz "dinamički sustav" u pravom

smislu opisuje dinamiku promatranih fizikalnih veličina i iz njega u svakom trenutku t moramo biti u mogućnosti očitati izlazne vrijednosti.

Osim toga, naš je zadatak ne samo promatrati neko gibanje, nego i utjecati na njega ukoliko bi moglo dovesti do nepoželjnih posljedica. Kako smo već rekli, tri osnovna dijela dinamičkog sustava su ulazna varijabla u , varijabla stanja x te izlazna varijabla y . Imajmo na umu Sliku 1.1 te zamislimo da zadamo sustavu vrijednost ulazne varijable (ili više njih, ovisno o promatranom problemu), te izmjerimo vrijednost izlazne varijable (ponovno, jedne ili više njih). U ovom trenutku poznate su nam samo te dvije informacije, bez znanja o tome što se događa u sustavu i na koji način se tamo jednačbe gibanja modeliraju, te kasnije rješavaju. Kako bismo željeli na neki način i utjecati na promatrano gibanje, bitno nam je znati u kojoj mjeri je naš sustav upravljiv, odnosno koliko nam je dopušteno sudjelovati u promjeni gibanja. Isto tako nam je važno znati kako naš utjecaj djeluje na dinamiku sustava.

U naredna tri potpoglavlja definirat ćemo dva osnovna pojma dinamičkih sustava: osmotrivost i upravljivost- dat ćemo kriterije osmotrivosti i upravljivosti, te reći nešto o problemima koji nastaju kada teoriju primijenimo u praksi, zbog ograničene numerike računala.

2.1 Upravlјivost dinamičkog sustava

Definicija 2.1.1. *Za sustav*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

kažemo da je **upravljiv** ako, počevši od proizvoljnog početnog stanja $x(0)$, sustav možemo dovesti u proizvoljno završno stanje $x_1 = x(t_1)$ u nekom konačnom vremenu t_1 , odabirući ulaznu varijablu $u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$ na odgovarajući način.

Teorem 2.1.2 (Kriterij upravljivosti). *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($m \leq n$). Tada je ekvivalentno:*

1. Sustav (2.1.1) je upravljiv.
2. Matrica reda $n \times nm$

$$C_M = (B, AB, A^2B, A^3B, \dots, A^{n-1}B)$$

je matrica punog ranga n .

3. Matrica

$$W_C = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

je nesingularna za svaki $t_1 > 0$.

4. Ako je (λ, x) svojstveni par matrice A^T , odnosno ako vrijedi $x^T A = \lambda x^T$, tada je $x^T B \neq 0$
5. Rang para $(A - \lambda I, B) = n$ za svaku svojstvenu vrijednost λ od A
6. Svojstvene vrijednosti od $A - BK$ mogu biti proizvoljno dodijeljene (uz pretpostavku da se kompleksne svojstvene vrijednosti pojavljuju u konjugiranim parovima) uz prikladan izbor matrice K .

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $t_0 = 0$. Neka je $x(0) = x_0$.

(1) \Rightarrow (2)

Pretpostavimo da matrica C_M nije punog ranga n . Čitatelja se upućuje na poglavlje 3.2, gdje je opisan postupak nalaženja rješenja diferencijalne jednačbe $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, jer ćemo sada iskoristiti formulu (3.2.6):

$$x(t_1) = e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} Bu(t) dt.$$

Nadalje, iz formule za red potencija eksponencijalne funkcije

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} x(t_1) - e^{At_1} x_0 &= \int_0^{t_1} \left\{ I + A(t_1 - t) + \frac{A^2}{2!}(t_1 - t)^2 + \dots \right\} Bu(t) dt = \\ &= B \int_0^{t_1} u(t) dt + AB \int_0^{t_1} (t_1 - t)u(t) dt + A^2 B \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - t)^2}{2!} u(t) dt + \dots \end{aligned}$$

Iz Cayley-Hamiltonovog teorema (svaka kvadratna matrica zadovoljava svoju karakterističnu jednačbu) slijedi da je vektor $x(t_1)$ linearna kombinacija stupaca $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$. Budući da C_M nije punog ranga, ovi stupci ne čine bazu za prostor stanja pa stoga za neki trenutak t_1 , ne postoji stanje $x(t_1) = x_1$ u koje bismo doveli dinamički sustav. Slijedi da sustav nije upravljiv.

(2) \Rightarrow (3)

Pretpostavimo da je matrica C_M punog ranga n , ali da je matrica W_C singularna. Neka je v nenul vektor takav da vrijedi $W_C v = 0$. Tada je i $v^T W_C v = 0$. Stoga je

$$\int_0^{t_1} v^T e^{At} B B^T e^{A^T t} v dt = 0.$$

Označimo sa $c(t) = B^T e^{A^T t} v$. Uočimo da je podintegralna funkcija nenegativna jer je oblika $c^T(t)c(t)$. Stoga, da bi gornji integral bio jednak nuli, mora vrijediti

$$v^T e^{A^T t} B = 0, 0 \leq t \leq t_1.$$

Iz tog izraza, uzastopnim deriviranjem po t za $t = 0$, dobivamo da vrijedi

$$v^T A^i B = 0, \text{ za } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Slijedi da je vektor v okomit na stupce matrice C_M . Iz pretpostavke da je C_M ranga n , dobivamo da je $v = 0$, što je kontradikcija s izborom vektora v .

(3) \Rightarrow (1)

Želimo pokazati da je $x(t_1) = x_1$. Odaberimo vektor $u(t)$ oblika

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} W_C^{-1} (-e^{A t_1} x_0 + x_1).$$

Iz jednadžbe (3.2.6) jednostavnim računom dobivamo da je $x(t_1) = x_1$. Odatle slijedi da je sustav (2.1.1) upravljiv.

(2) \Rightarrow (4)

Neka je x svojstveni vektor matrice A^T koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ , odnosno vrijedi $x^T A = \lambda x^T$. Pretpostavimo da je $x^T B = 0$. Tada slijedi

$$x^T C_M = (x^T B, \lambda x^T B, \lambda^2 x^T B, \dots, \lambda^{n-1} x^T B) = 0.$$

Budući da je matrica C_M punog ranga, slijedi da je $x = 0$, što je kontradikcija.

(4) \Rightarrow (2)

Pretpostavimo da nijedan svojstveni vektor od A^T nije ortogonalan na stupce od B , te da je matrica C_M ranga k , $k < n$. Tada postoji nesingularna matrica T takva da vrijedi

$$\tilde{A} = T A T^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = T B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.1.2)$$

gdje je \tilde{A}_{22} reda $n - k$, a k je rang matrice C_M . Neka je v_2 svojstveni vektor od $(\tilde{A}_{22})^T$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ . Tada vrijedi

$$(\tilde{A})^T \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^T & 0 \\ \tilde{A}_{12}^T & \tilde{A}_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{A}_{22}^T v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (2.1.3)$$

Nadalje,

$$\begin{bmatrix} 0, v_2^T \end{bmatrix} \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0, v_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.1.4)$$

Dakle, postoji svojstveni vektor od $(\tilde{A})^T$, označimo ga sa $[0, v_2]^T$, koji je ortogonalan na stupce od \tilde{B} . To znači da par (\tilde{A}, \tilde{B}) nije upravljiv. To je kontradikcija jer matična transformacija sličnosti ne mijenja upravljivost.

(2) \Rightarrow (5)

Rang para $(\lambda I - A, B) < n$ ako i samo ako postoji nenul vektor v takav da vrijedi $v^T(\lambda I - A, B) = 0$. Ova jednažba je ekvivalentna sljedećim dvjema:

$$A^T v = \lambda v; \quad v^T B = 0. \quad (2.1.5)$$

To znači da je v svojstveni vektor matrice A^T koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ i ortogonalan je na stupce od B . Sustav (A, B) stoga nije upravljiv po tvrdnji (4).

(5) \Rightarrow (2)

Pretpostavimo da tvrdnja (5) ne vrijedi. Tada iz (4) slijedi

$$x^T(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = 0,$$

odakle slijedi da je matrica C_M ranga manjeg od n .

(6) \Rightarrow (1)

Pretpostavimo da vrijedi (6), ali ne i (1). Tada sustav možemo transformirati u oblik 2.1.3 na način da je podsustav koji odgovara matrici \tilde{A}_{22} neupravljiv, čiji svojstvene vrijednosti stoga ne možemo mijenjati kontrolom tog sustava. To je kontradikcija sa (6).

(1) \Rightarrow (6)

Ako je par (A, B) upravljiv, tada matricu K možemo konstruirati tako da svojstvene vrijednosti matrice $(A - BK)$ budu na željenoj lokaciji. Ovaj dio dokaza nije toliko relevantan za naša razmatranja, stoga ostavljamo čitatelju na volju pogledati dokaz u [1].

□

Definicija 2.1.3. Matrica

$$C_M = (B, AB, A^2B, A^3B, \dots, A^{n-1}B)$$

naziva se **matrica upravljivosti**.

Često se za upravljivost definiranu u Definiciji 2.1.1 još kaže **kompletna upravljivost**. Tu se referira na činjenicu da su sva stanja upravljiva. Promotrimo sada jednu komponentu $u_j(t)$ ulazne varijable $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$. Upravljiva matrica za tu komponentu je oblika $C_M^j = (b_j, Ab_j, \dots, A^{n-1}b_j)$, gdje je b_j j -ti stupac od B . Rang matrice C_M^j određuje broj stanja koja su upravljiva pri ulazu $u_j(t)$.

2.2 Osmotrivost dinamičkog sustava

Definicija 2.2.1. Za vremenski neprekidan sustav (2.1.1) kažemo da je **osmotriv** ako postoji $t_1 > 0$ takav da početno stanje $x(0)$ može na jedinstven način biti određeno iz poznavanja ulazne varijable $u(t)$ i izlazne varijable $y(t)$ za sve $t, 0 \leq t \leq t_1$.

Uočimo da smo kod upravljivosti sustava zapravo promatrali upravljivost para (A, B) . Kod osmotrivosti promatramo osmotrivost para (A, C) . Koncept osmotrivosti je dualan konceptu upravljivosti. To se vidi u sljedećem teoremu.

Teorem 2.2.2 (Kriterij osmotrivosti). *Ekvivalentno je:*

1. Sustav (2.1.1) je osmotriv.
2. Matrica osmotrivosti

$$O_M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

ima puni rang n .

3. Matrica

$$W_O = \int_0^{t_1} e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

je nesusingularna za svaki $t_1 > 0$.

4. Matrica

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

je ranga n za svaku svojstvenu vrijednost λ od A .

5. Nijedan svojstveni vektor od A nije ortogonalan retcima od C , odnosno, ako je (λ, y) svojstveni par od A , tada je $Cy \neq 0$.
6. Postoji matrica L takva da se svojstvene vrijednosti od $A + LC$ mogu dodijeliti proizvoljno, pod pretpostavkom da se pojavljuju kao kompleksno konjugirani parovi.

Dokaz ovog teorema nećemo navoditi, a može se naći u [1].

Kao u slučaju upravljivosti, i ovdje možemo govoriti o osmotrivosti po komponentama u slučaju kada nisu sva stanja osmotriva određenim izlazom $y(t)$. Promotrio matricu osmotrivosti

$$C_M^j = \begin{bmatrix} \lambda c_j \\ C_j A \\ \vdots \\ C_j A^{n-1} \end{bmatrix}$$

gdje c_j označava j -ti redak matrice izlaza C . Rang matrice osmotrivosti C_M^j određuje broj stanja koja su osmotriva pri izlazu $y_j(t)$.

2.3 Numeričke poteškoće s teorijskim kriterijem upravljivosti i osmotrivosti

Navedeni algebarski kriteriji za upravljivost i osmotrivost sustava navode nas da testiramo potonje. Nažalost, mnogi od ti kriterija ne vode do numerički održivih testova. Navedimo jedan primjer.

Kriterij (2) teorema 2.1.2 je rekao da, ukoliko je sustav upravljiv, matrica reda $n \times nm$

$$C_M = (B, AB, A^2B, A^3B, \dots, A^{n-1}B)$$

je matrica punog ranga n . Ovaj kriterij zahtijeva uzastopno množenje matrica i određivanje ranga matrice reda $n \times nm$. Poznato je da množenje neortogonalnih matrica može dovesti do netočnosti njihovog produkta. Stoga problem može postati mnogo osjetljiviji u numeričkom smislu. Pokažimo to na sljedećem primjeru:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2^{-1} & & & \\ & & 2^{-2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2^{-9} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uočimo da je matrica A reda 10×10 i da je par (A, B) upravljiv. Matrica upravljivosti (B, AB, \dots, A^9B) može se lako izračunati i zadržati numerički točnom. Budući da je A dijagonalna matrica, i svaka njena potencija će biti dijagonalna matrica. U k -toj potenciji matrice A na mjestu (i, i) će stajati $2^{(-i+1)k}$. Kada pomnožimo proizvoljnu dijagonalnu matricu s vektorom-stupcem koji sadrži jedinice, rezultat će biti vektor-stupac koji sadrži

dijagonalne elemente te matrice. Stoga će umnožak matrice A^k i vektora B biti vektor oblika

$$A^k B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2^{(-1)k} \\ 2^{(-2)k} \\ \vdots \\ 2^{(-9)k} \end{bmatrix}$$

Stupce matrice osmotrivosti C_M predstavljaju vektori gornjeg oblika.

$$C_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 2^{-1} & (2^{-1})^2 & & (2^{-1})^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2^{-9} & (2^{-9})^2 & & (2^{-9})^{n-1} \end{bmatrix}$$

Dakle, na mjestu (i, j) matrice upravljivosti C_M nalazi se element oblika $2^{(-i+1)(j-1)}$. Pogledajmo kakve rezultate ćemo dobiti u programskom paketu MATLAB, u decimalnom zapisu dvostruke preciznosti. Dobit ćemo sljedeće singularne vrijednosti matrice C_M :

Tablica 2.1: Singularne vrijednosti matrice C_M

prikaz na 4 decimale	prikaz za 32 decimale
3.6298	3.629836701134050932410774783137
2.4575	2.4575439566355434153422722379858
0.4494	4.4940265426046773523707362572621 $\times 10^{-1}$
0.0622	6.2196714245294726160294508990246 $\times 10^{-2}$
0.0052	5.2086735654782295775841655760219 $\times 10^{-3}$
0.0002	2.4488496134873464852781589679877 $\times 10^{-4}$
0.0000	6.0113716853301401350481262747971 $\times 10^{-6}$
0.0000	7.1246969439680804391066224161675 $\times 10^{-8}$
0.0000	3.6402556216408132211672578555274 $\times 10^{-10}$
0.0000	6.128943630207164714556369812844 $\times 10^{-14}$

U kraćem prikazu, dobivamo da matrica C_M ima četiri singularne vrijednosti jednake nuli, odakle bismo zaključili da je matrica numeričkog ranga manjeg od 10, što bi povlačilo da je sustav neupravljiv.

Prisjetimo se, za matricu A reda n kažemo da ima numerički rang r ako izračunate singularne vrijednosti $\sigma_i, i = 1, \dots, n$ zadovoljavaju $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \delta \geq \sigma_{r+1} \geq$

$\dots \geq \sigma_n$, gdje je δ tolerancija. Dakle, numerički rang matrice je broj "velikih" singularnih vrijednosti koje se nalaze s iste strane najveće praznine između svih singularnih vrijednosti te matrice.

Uočimo još da je računanje ranga matrice pomoću singularnih vrijednosti najtočnija numerička metoda, a ovdje nam je propala. Spomenimo samo da su do sada implementirani algoritmi koji uspješno testiraju upravljivost i zaobilaze ovakve probleme. Više o tome može se naći u [1].

2.4 Stabilnost dinamičkog sustava

U praksi nam je bitno da fizikalni problem kojeg promatramo prevedemo što bolje na matematički jezik, te da matematički model ne "pobjegne" od stvarnog fizikalnog problema niti u jednom trenutku. Takav model, očito, nema smisla promatrati niti računati. U ovom potpoglavlju upoznat ćemo se s terminima ekvilibrija sustava, stabilnosti dinamičkog sustava, te nekim karakterizacijama stabilnosti. Stabilnost sustava definira se u odnosu na ekvilibrij stanja pa ćemo prvo definirati ekvilibrij stanja sustava na koji ne djeluje sila (dinamički sustav bez ulaza), a zatim pogledati kako možemo proširiti definicije i karakterizacije na sustav na kojeg djelujemo ulazom (sila, struja ili neki drugi podražaj).

Promotrimo sustav na kojeg ne djeluje sila

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.4.1)$$

Definicija 2.4.1. *Stanje ekvilibrija sustava (2.4.1) jest vektor x_e koji zadovoljava*

$$Ax_e = 0.$$

Drugim riječima, sustav je u ravnoteži (ekvilibrij) ako je promjena po jedinici vremena jednaka nuli, a što je upravo prva vremenska derivacija \dot{x}_e vektora x_e . Očito, $x_e = 0$ jest trivijalno stanje ekvilibrija jer zadovoljava $Ax_e = 0$ i jedinstveno je ako i samo ako je matrica A regularna, odnosno kada sustav jednadžbi $Ax_e = 0$ ima jedinstveno rješenje. Dakle, jedinstveno stanje ekvilibrija x sustava (2.4.1) je jedinstveno rješenje linearnog sustava jednadžbi $Ax = 0$.

Definicija 2.4.2. *Stanje ekvilibrija x_e je asimptotski stabilno ako se za svako početno stanje $x(0)$, vektor stanja $x(t)$ približava ekvilibriju x_e kako se vrijeme t povećava.*

Sustav (2.4.1) je asimptotski stabilan ako i samo ako je stanje ekvilibrija asimptotski stabilno ($x(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$). U sljedećem teoremu ćemo reći nešto više o karakterizaciji asimptotske stabilnosti sustava (2.4.1).

Teorem 2.4.3. *Sustav (2.4.1) je asimptotski stabilan ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativan realan dio.*

Dokaz. Neka je x_0 proizvoljan početni uvjet. Lako je provjeriti da je $x(t) = e^{At}x_0$ opće rješenje sustava (2.4.1). Stoga, $x(t) \rightarrow 0$ ako i samo ako $e^{At} \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$. Želimo pokazati da to vrijedi ako i samo ako svojstvene vrijednosti od A imaju negativan realan dio. Neka je $X^{-1}AX = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_k)$ Jordanova kanonska forma matrice A . Tada vrijedi

$$e^{At} = X \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_k t}) X^{-1}.$$

Neka je λ_i svojstvena vrijednost pridružena Jordanovom bloku J_i . Iz [6] imamo formulu, za $\lambda_i = a + bi$, $e^{\lambda_i t} = e^a(\cos b + i \sin b)$ odakle je očito da će taj izraz težiti k nuli ako i samo ako $a \rightarrow -\infty$, odnosno realni dio svojstvene vrijednosti λ_i je negativan. \square

Napomena 2.4.4. *Prisjetimo se Jordanove kanonske forme: za svaku kompleksnu kvadratnu matricu A postoji regularna matrica X takva da vrijedi*

$$X^{-1}AX = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_k),$$

gdje je

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

matrica reda $m_i \times m_i$, gdje je m_i kratnost svojstvene vrijednosti λ_i matrice A , te vrijedi $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. Dakle, J_i su blokovi koji, poslagani dijagonalno jedan do drugog, čine blok-dijagonalnu matricu J koja na dijagonali sadrži svojstvene vrijednosti matrice A . Detalji se mogu naći u [7].

Definicija 2.4.5. *Matrica A se zove **stabilna matrica** ako sve svojstvene vrijednosti od A imaju negativan realni dio.*

Spomenimo da se stabilna matrica u literaturi dinamičkih sustava još naziva i **Hurwitzova matrica**. Analogno, svojstvena vrijednost s negativnim realnim dijelom naziva se **stabilna svojstvena vrijednost**. Budući da asimptotska stabilnost sustava (2.4.1) daje da funkcija odziva tog sustava bez ulaza teži k nuli eksponencijalno, asimptotska stabilnost se ponekad još naziva **eksponencijalna stabilnost**. Nadalje ćemo sa $\Re(z)$ označavati realni dio kompleksnog broja z , a sa $\Im(z)$ njegov imaginarni dio.

Definicija 2.4.6. *Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A . Tada se udaljenost $\min\{-\Re(\lambda_i) : i = 1, \dots, n\}$ do imaginarne osi naziva **marginom stabilnosti** od A .*

Do sada smo u ovom potpoglavlju pojmove vezane uz stabilnost dinamičkog sustava definirali za sustav na koji nije djelovala sila, odnosno na sustav bez ulaza. Sada ćemo definirati analogne pojmove za sustav s ograničenim ulazom $u(t)$ i ograničenim izlazom $y(t)$, te ograničenim ulazom $u(t)$ i ograničenim stanjem $x(t)$.

Definicija 2.4.7. *Za vremenski neprekidan linearan sustav*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(u), \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

*kažemo da je **BIBO stabilan** (bounded-input bounded-output) ako vrijedi da je, za svaki ograničeni ulaz, izlaz također stabilan.*

Ovdje nam je dobro spomenuti funkciju prijelaza $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ dinamičkog sustava koja povezuje ulaz i izlaz sustava u frekvencijskoj domeni (vidi poglavlje 4). Polovi funkcije prijelaza $H(s)$ su svojstvene vrijednosti matrice sustava A te vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.4.8. *Sustav (2.4.2) je BIBO stabilan ako i samo ako svaki pol funkcije prijelaza $H(s)$ ima negativan realni dio.*

Uočimo da (asimptotska) stabilnost sustava povlači BIBO stabilnost: za (asimptotski) stabilan sustav vrijedi da svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativan realni dio. Polovi funkcije prijelaza $H(s)$ su svojstvene vrijednosti od A , stoga je sustav i BIBO stabilan. Obrat općenito ne vrijedi. Definirajmo stabilnost sustava s ograničenim ulazom i ograničenim stanjem (BIBS stabilnost).

Definicija 2.4.9. *Za sustav (2.4.2) kažemo da je **BIBS stabilan** (bounded-input bounded-state) ako je za svaki ograničeni ulaz odziv stanja također ograničen.*

Slijedi karakterizacija BIBS stabilnosti, u terminima svojstvenih vrijednosti matrice A i upravljivosti modova dinamičkog sustava.

Teorem 2.4.10. *Sustav (2.4.2) je BIBS stabilan ako i samo ako*

- *Sve svojstvene vrijednosti od A imaju nenegativne realne dijelove.*
- *Ako svojstvena vrijednost λ_i ima samo imaginarni dio, tada je potencija pripadnog faktora u minimalnom polinomu od A nužno jednaka 1.*
- *Mod koji pripada svojstvenoj vrijednosti bez realnog dijela mora biti neupravljiv.*

Spomenimo još jedan bitan pojam vezan uz stabilnost. U praksi se može dogoditi da je matrica A stabilna po kriterijima nabrojanim do sad. Naime, moguće je da se ona nalazi jako blizu nestabilne matrice, odnosno, da malom promjenom samo jedne vrijednosti u matrici (kao što je greška zaokruživanja kod računanja) dobijemo nestabilnu matricu. Promotrimo sljedeći primjer:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

Matrica A ima sve svojstvene vrijednosti jednake -0.5 , stoga je stabilna. No, kada joj element na mjestu $(6,1)$ iz nule promijenimo u $\epsilon = 1/45$, dobijemo sljedeće svojstvene vrijednosti: $0.2783, -0.8839, -0.3826 \pm 0.612i, -0.8146 \pm 0.3043i$. Ova matrica je nestabilna jer prva svojstvena vrijednost ima realni dio veći od nule. Spomenimo još da postoje algoritmi za određivanje udaljenosti stabilne matrice od nestabilne, a više o tome može se naći u [1].

Poglavlje 3

Prijelaz iz vremenske domene u frekvencijsku domenu

Spomenuli smo na početku rada dva pristupa modeliranju linearnih sustava: vremenska domena i frekvencijska domena. Kada polazimo od modeliranja fizikalnog problema, koristimo poznate formule i zakone fizike koji su nam potrebni za opis određenog gibanja (masa na opruzi, horizontalni hitac, njihalo i dr.). Promatramo gibanje kao promjenu položaja tijela u vremenu- tu radimo u vremenskoj domeni i naš dinamički sustav opisan je sustavom diferencijalnih jednadžbi. Iza toga postoji velika teorija o rješavanju, jedinstvenosti rješenja i slično. Nas zanima kako uz pomoć računala numerički riješiti taj sustav što brže i točnije. Budući da računala ne znaju rješavati diferencijalne jednadžbe kao što to radimo na papiru, potrebno je preformulirati problem u jednostavnije jednadžbe. Laplaceova transformacija nam tu bitno olakšava problem- ona na jedinstven način preslikava naš sustav diferencijalnih jednadžbi u frekvencijsku domenu. Što to znači? U frekvencijskoj domeni promatramo funkcije zapisane u obliku parcijalnih razlomaka, odnosno naše diferencijalne jednadžbe tu postaju obične linearne jednadžbe s kojima je lako računati, te koristimo osnovne algebarske operacije. Kada jednom imamo sustav linearnih jednadžbi, lako ga je riješiti, na primjer, metodom najmanjih kvadrata. Po potrebi lako možemo vratiti dobivena rješenja natrag u vremensku domenu preko inverzne Laplaceove transformacije, koja je naravno jedinstvena, te iščitati rješenje početnog problema u vremenskoj domeni. Prisjetit ćemo se najvažnijih rezultata, vezanih uz Laplaceovu transformaciju, koje ćemo kasnije u radu koristiti.

3.1 Laplaceova transformacija

Laplaceova transformacija je integralna transformacija funkcije. Funkciju pozitivne realne varijable t (najčešće vremenske) preslikava u funkciju kompleksne varijable s (frekven-

cija). Detaljniji pregled funkcija kompleksne varijable može se naći u [6].

Definicija 3.1.1. *Neprazan otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zove se **područje** ako za bilo koje dvije točke a i b iz Ω postoji konačno točaka $a = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = b$, takvih da spojnice $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{n-1}, z_n]$ leže u Ω .*

Spojnica $[z, z']$ proizvoljne dvije točke $z, z' \in \mathbb{C}$ jest segment na pravcu kroz te točke, omeđen tim točkama:

$$[z, z'] = (1 - t)z + tz' : 0 \leq t \leq 1.$$

Definicija 3.1.2. *Ako za funkciju $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, za područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i svako $s \in \Omega$ nepravilni integral*

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

*konvergira, onda se funkcija kompleksne varijable $\hat{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ naziva **Laplaceova transformacija** funkcije f na području Ω , gdje kompleksan broj $s = \sigma + i\omega$ zovemo **frekvencijski parametar** ili **kompleksna frekvencija**, sa realnim skalarima σ i ω .*

Uobičajena oznaka Laplaceove transformacije funkcije $f(t)$ je $\mathcal{L}[f(t)]$, ili kraće $\hat{f}(s)$. U sljedećoj tablici dane su Laplaceove transformacije nekih funkcija koje češće susrećemo u primjeni.

Tablica 3.1: funkcija $f(t)$ i njena Laplaceova transformacija $\hat{f}(s)$

	$f(t)$	$\hat{f}(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	c	$\frac{c}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
9	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

Iz same definicije funkcije $\hat{f}(s)$ može se naslutiti da će nam izraz e^{-st} biti od važnosti. Imajući to na umu, u iduća dva potpoglavlja upoznat ćemo se s dva nova bitna pojmatricom prijelaza stanja i frekvencijskom matricom.

3.2 Matrica prijelaza stanja

Laplaceova transformacija je iskoristiva za rješavanje naše početne jednadžbe (1.1.1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(t_0) = x_0$$

samo kada su matrice A i B konstantne u vremenu t , što je ionako naša pretpostavka proizšla iz vremenske invarijantnosti sustava.

Promotrimo Laplaceovu transformaciju vremenske derivacije funkcije $f(t)$:

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} f(t) dt, \quad (3.2.1)$$

gdje smo nakon drugog znaka jednakosti iskoristili parcijalnu integraciju. Stavimo da vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) \rightarrow 0.$$

Tada jednadžba (3.2.1) postaje

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt - f(0) = s\hat{f}(s) - f(0) \quad (3.2.2)$$

Uočimo da jednadžba (3.2.2) vrijedi i kada je $f(t)$ vektor, tada se jednostavno primijeni na svaku od komponenti. Također, zbog homogenosti Laplaceove transformacije, vrijedi

$$\mathcal{L}[Ax(t)] = A\hat{x}(s).$$

Kada prethodno primijenimo na jednadžbu (1.1.1), imajući u vidu da su A i B konstantne matrice, dobivamo sljedeće:

$$s\hat{x}(s) - x(0) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s)$$

odnosno

$$(sI - A)\hat{x}(s) = x(0) + B\hat{u}(s)$$

Izrazimo iz prethodne jednadžbe $\hat{x}(s)$ i dobivamo

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \quad (3.2.3)$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije na $\hat{x}(s)$ u frekvencijskoj domeni, iz (3.2.3) dobivamo željeno rješenje za $x(t)$ u vremenskoj domeni. Uočimo da je $\hat{x}(s)$ suma dva člana: prvi dolazi iz početnog uvjeta $x(0)$ pomnoženog matricom $(sI - A)^{-1}$, a drugi kao produkt

te matrice i člana $B\hat{u}(s)$ iz ulaza.

Iz Tablice 3.1 vidimo da u skalarnom slučaju vrijedi

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} = (s-a)^{-1} \quad (3.2.4)$$

Analogna formula vrijedi i u slučaju kada je a matrica (matricu ćemo označiti sa A)

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1} \quad (3.2.5)$$

Sada možemo naći inverznu Laplaceovu transformaciju od (3.2.3) i dobivamo rješenje varijable stanja u vremenskoj domeni

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \quad (3.2.6)$$

Nađimo sada Laplaceovu transformaciju za jednadžbu (1.1.2). Iz homogenosti transformacije i uvrštavanjem (3.2.3) slijedi

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s) = \\ &= C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) + D\hat{u}(s). \end{aligned}$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije uz uvjet da su matrice A , B , C i D konstantne, dobivamo rješenje varijable izlaza u vremenskoj domeni, oblika

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda + Du(t) \quad (3.2.7)$$

Eksponecijalna matrica e^{At} naziva se **matrica prijelaza stanja**. Njena Laplaceova transformacija $(sI - A)^{-1}$ naziva se rezolventa od A , odnosno u terminima dinamičkih sustava, **(karakteristična) frekvencijska matrica**.

3.3 Frekvencijska matrica

Prisjetimo se jedne od osnova matrica iz linearne algebre, Cramerovog pravila, koje kaže da inverz matrice možemo računati kao kvocijent adjunkte i determinante početne matrice, odnosno u terminima rezolvente od A :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^*}{|sI - A|}.$$

Općenito, za sustav reda $n \times n$, matrica $sI - A$ bit će sljedećeg oblika

$$sI - A = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pri računanju determinante $|sI - A|$ jedan od članova u sumi bit će produkt dijagonalnih elemenata od $sI - A$

$$(s - a_{11})(s - a_{22}) \dots (s - a_{nn}) = s^n + c_1 s^{(n-1)} + \dots + c_n,$$

odnosno polinom stupnja n s jediničnim vodećim koeficijentom. Ostali članovi sume će biti očito nižeg stupnja od n . Stoga determinantu možemo zapisati kao polinom stupnja n

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n. \quad (3.3.1)$$

Ovaj polinom znamo kao **karakteristični polinom matrice A**. On igra bitnu ulogu u dinamičnom ponašanju sustava. Nultočke ovog polinoma zovemo karakteristični korijeni, svojstvene vrijednosti, ili **polovi sustava** i određuju stabilnost sustava koju smo obradili u poglavlju 2.4.

Adjunkta matrice reda $n \times n$ je također matrica reda $n \times n$ čiji elementi su kofaktori originalne matrice. Svaki kofaktor se dobiva računanjem determinante matrice koju dobijemo kada obrišemo pripadni redak i stupac iz originalne matrice. Odatle slijedi da je svaki element adjunkte $(sI - A)^*$ polinom maksimalnog stupnja $n - 1$. Očito ne može biti višeg stupnja budući da smo maknuli jedan redak i stupac početne matrice. Objasnimo to na primjeru. Neka je adjunkta sljedećeg oblika

$$(sI - A)^* = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo kofaktor K_{11} . To je determinanta matrice $(sI - A)$ kojoj smo obrisali prvi redak i prvi stupac, odnosno

$$K_{11} = \begin{vmatrix} s - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ a_{32} & s - a_{33} & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & s - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pri računanju te determinante, množenjem dijagonalnih elemenata od K_{11} dobit ćemo polinom stupnja $n - 1$. To će ujedno biti polinom najvećeg stupnja u navedenoj determinanti, dok će ostali doprinosi iz determinante biti polinomi stupnja manjeg od $n - 1$. Stoga kofaktor K_{11} možemo zapisati u polinomijalnom obliku kao

$$K_{11} = s^{n-1} + e_1^{(11)} s^{n-2} + \cdots + e_{n-2}^{(11)} s + e_{n-1}^{(11)},$$

gdje gornji indeksi označavaju da koeficijenti $e_1^{(ij)}, \dots, e_{n-1}^{(ij)}$ pripadaju kofaktoru K_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$. Analogno se računaju ostali kofaktori K_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$. Slijedi

$$[(sI - A)^*]_{ij} = K_{ij} = s^{n-1} + e_1^{(ij)} s^{n-2} + \cdots + e_{n-2}^{(ij)} s + e_{n-1}^{(ij)}, i, j = 1, \dots, n.$$

Odavde vidimo da matricu $(sI - A)^*$ možemo zapisati u obliku

$$(sI - A)^* = s^{n-1} I + s^{n-2} E_1 + \cdots + s E_{n-2} + E_{n-1}$$

gdje su E_k , $k = 1, \dots, n - 1$ matrice reda n oblika

$$[E_k]_{ij} = e_k^{(ij)}, i, j = 1, \dots, n.$$

Dakle, frekvencijsku matricu $(sI - A)^{-1}$ možemo zapisati u sljedećem obliku

$$(sI - A)^{-1} = \frac{s^{n-1} I + s^{n-2} E_1 + \cdots + s E_{n-2} + E_{n-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}. \quad (3.3.2)$$

Stoga, frekvencijska matrica se može zapisati kao prava racionalna funkcija, čiji je brojnik polinom stupnja $n - 1$, a nazivnik polinom stupnja n . Odavde se da naslutiti da ćemo u aproksimacijskoj metodi u poglavlju 5 koristiti funkciju ovakvog oblika, odnosno pravu racionalnu funkciju.

Poglavlje 4

Veza između ulaza i izlaza- funkcija prijelaza

U frekvencijskoj domeni, zanimaju nas veze između ulaza u i izlaza y . Često u analizi ovog sustava pretpostavljamo da je $x(0) = 0$. U tom slučaju Laplaceova transformacija stanja glasi

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1} B \hat{u}(s)$$

Ako je izlaz definiran sa

$$y(t) = Cx(t)$$

tada je njegova Laplaceova transformacija dana sa

$$\hat{y}(s) = C \hat{x}(s)$$

odnosno, uvrstivši gore dobiveni $\hat{x}(s)$, dobivamo formulu

$$\hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1} B \hat{u}(s) \quad (4.0.1)$$

Matrica

$$\hat{H}(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (4.0.2)$$

koja povezuje Laplaceovu transformaciju izlaza s Laplaceovom transformacijom ulaza, zove se **matrica funkcije prijelaza** i ona je ključan pojam ovog rada. Naš je cilj pronaći najbolju aproksimaciju funkcije prijelaza, što ćemo detaljno razraditi u narednim poglavljima. Inverzna Laplaceova transformacija matrice funkcije prijelaza

$$H(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{H}(s)] = C e^{At} B \quad (4.0.3)$$

zove se **matrica odziva**.

U vremenskoj domeni $y(t)$ možemo izraziti kao konvoluciju matrice odziva sa ulazom

$$y(t) = \int_0^t H(t - \lambda) u(\lambda) d\lambda = \int_0^t C e^{A(t-\lambda)} B u(\lambda) d\lambda \quad (4.0.4)$$

Kako smo ranije vidjeli, elementi adjunkte matrice $sI - A$ su reda $n - 1$. Stoga red matrice funkcije prijelaza $\hat{H}(s)$ ne može biti veći od $n - 1$ (prisjetimo se, promatramo sustav u kojem su A, B, C i D konstantne matrice). Posebno, za $D = 0$, matrica prijelaza ima oblik

$$\begin{aligned}\hat{H}(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \\ &= \frac{C[E_1s^{n-1} + E_2s^{n-2} + \dots + E_n]B}{|sI - A|} = \\ &= \frac{CBs^{n-1} + CE_2Bs^{n-2} + \dots + CE_nB}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}.\end{aligned}\tag{4.0.5}$$

U ovom radu nadalje ćemo matricu prijelaza označavati sa $H(s)$ umjesto sa $\hat{H}(s)$, podrazumijevat ćemo da se radi o Laplaceovoj transformaciji matrice $H(t)$ budući da ćemo daljnju teoriju razvijati u frekvencijskoj domeni. U sljedećoj tablici imamo prikazane veze do sad spomenutih najvažnijih pojmova: matrica prijelaza stanja, frekvencijska matrica, matrica odziva, matrica funkcije prijelaza. Frekvencijska matrica je Laplaceova transformacija matrice prijelaza stanja, a matrica funkcije prijelaza je Laplaceova transformacija matrice odziva.

Tablica 4.1

vremenska domena	frekvencijska domena = \mathcal{L} [vremenska domena]
e^{At}	$(sI - A)^{-1}$
matrica prijelaza stanja	frekvencijska matrica (rezolventa)
$Ce^{At}B = H(t)$	$C(sI - A)^{-1}B = H(s)$
matrica odziva	matrica funkcije prijelaza

Poglavlje 5

Racionalna aproksimacija u smislu najmanjih kvadrata

Neka je zadan n -dimenzionalni sustav

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

sa funkcijom prijelaza $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. U praksi je ponekad jedina dostupna informacija o sustavu niz vrijednosti $H(i\omega_k)$, $k = 1, \dots, l$, dobivenih mjerenjem. Naš zadatak je identificirati sustav, odnosno odrediti funkciju prijelaza H_r koja u smislu najmanjih kvadrata najbolje aproksimira H .

Pretpostavimo da su nam zadane točke u kojima smo obavili mjerenja od interesa, te izmjerene vrijednosti u tim točkama. Trenutno je to jedina informacija s kojom raspolažemo. Budući da su to najčešće mjerenja iz našeg fizikalnog svijeta, zanima nas što se događa sa sustavom i između tih točaka, kakva mu je dinamika. Naš zadatak je matematičkim metodama odrediti te vrijednosti, odnosno naći dovoljno dobar matematički opis gibanja iz kojeg ćemo moći vidjeti dinamiku sustava u svakom trenutku $t > 0$ od početka do kraja gibanja.

5.1 Metoda najmanjih kvadrata

Neka su zadane točke $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ te vrijednosti u tim točkama dobivene mjerenjem, $H(\xi_1), H(\xi_2), \dots, H(\xi_l)$. Označimo sa s niz tih točaka, odnosno stavimo $s = (\xi_i)_{i=1}^l$. Želimo naći funkciju koja zadovoljava te zadane vrijednosti, te koja nam vjerno opisuje ponašanje sustava u svim ostalim točkama od interesa. Intuitivno, aproksimacijska funkcija će biti prava racionalna funkcija zbog prirode prijelaza iz vremenske u frekvencijsku domenu, što

smo naveli na kraju poglavlja 3. Naravno, trebamo algoritam kojim ćemo doći do najbolje aproksimacije funkcije koja zadovoljava naša mjerenja. Najlakše je krenuti od metode najmanjih kvadrata. U terminima podataka kojima raspolažemo, a to su točke $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ te vrijednosti u tim točkama dobivene mjerenjem $H(\xi_1), H(\xi_2), \dots, H(\xi_l)$, formalni pristup daje sljedeće.

Neka je sa R_r označen skup pravih racionalnih funkcija reda r (to su funkcije čiji je nazivnik polinom reda r , a brojnik polinom reda strogo manjeg od r). Neka su zadane kompleksne točke $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$, pripadne kompleksne vrijednosti $H(\xi_1), H(\xi_2), \dots, H(\xi_l)$, te težinske vrijednosti $\rho_i > 0, i = 1, 2, \dots, l$. Pripadni problem najmanjih kvadrata glasi: odrediti funkciju $H_r(s) \in R_r$ takvu da vrijedi

$$\sum_{j=1}^l \rho_j |H_r(\xi_j) - H(\xi_j)|^2 \rightarrow \min. \quad (5.1.1)$$

Matematičari su se ovim pitanjem u teoriji dinamičkih sustava bavili dugi niz godina. Neke od početnih ideja bile su da uzmemo racionalnu aproksimaciju H_r oblika

$$H_r(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, \text{ gdje je } n(s) = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j s^j \text{ i } d(s) = 1 + \sum_{j=1}^r \beta_j s^j. \quad (5.1.2)$$

Uočimo da ovaj problem možemo zapisati u obliku (5.1.1); dodatno, stavimo $\rho_j = 1, j = 1, 2, \dots, l$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l |H_r(\xi_j) - H(\xi_j)|^2 &= \sum_{j=1}^l \left| \frac{n(\xi_j)}{d(\xi_j)} - H(\xi_j) \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^l \frac{1}{|d(\xi_j)|^2} |n(\xi_j) - d(\xi_j)H(\xi_j)|^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Jedna od daljnjih ideja bila je minimizirati problem izveden iz prethodnog, koji je jednostavniji

$$\sum_{j=1}^l |n(\xi_j) - d(\xi_j)H(\xi_j)|^2. \quad (5.1.4)$$

To je problem najmanjih kvadrata koji je linearan u koeficijentima $\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}$, što nije bio slučaj u (5.1.1), odnosno sada imamo običnu linearnu jednadžbu kojoj je lako naći rješenje. Međutim, Sanathanan i Koerner su našli primjere za koje ovo pojednostavljenje ne daje zadovoljavajuće rezultate, te razvijajući dalje smjer ove ideje došli do zaključka da bi se u iteracijama za rješavanje (5.1.1) formulacija (5.1.4) mogla iskoristiti u prvom koraku.

5.2 Sanathanan- Koerner iteracije

Uočimo da u jednadžbi (5.1.4) nema težinskog faktora $\frac{1}{|d(\xi_j)|^2}$. Očito je da taj član može davati razne doprinose problemu (5.1.3) te varirati i njegovim izbacivanjem u pojednostavljenju problema najmanjih kvadrata (5.1.4) može doći do netočnog rješenja, budući da smo izbacili bitan faktor iz jednadžbe. Sanathanan i Koerner razvili su novi pristup rješavanju spomenutog problema najmanjih kvadrata. Dodijelimo početnoj težini vrijednost 1, kao što smo spomenuli, iskoristimo u prvoj iteraciji jednadžbu (5.1.4), $d^{(0)}(s) \equiv 1$. Rješavamo sljedeći problem minimizacije, za $k = 0, 1, 2, \dots$, dok ne dobijemo dovoljno dobru aproksimaciju

$$d^{(0)}(s) \equiv 1 \quad (5.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^l \left| \frac{n^{(k+1)}(\xi_i) - d^{(k+1)}(\xi_i)H(\xi_i)}{d^{(k)}(\xi_i)} \right|^2 \rightarrow \min.$$

Ovakvu iterativnu metodu zovemo **SK iteracije**. Problem (5.2.1) zapišimo u obliku

$$\sum_{i=1}^l \frac{1}{|d^{(k)}(\xi_i)|^2} \left| n^{(k+1)}(\xi_i) - d^{(k+1)}(\xi_i)H(\xi_i) \right|^2 \rightarrow \min.$$

Nakon uvrštavanja $n^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j^{(k+1)} s^j$ i $d^{(k+1)} = 1 + \sum_{j=1}^r \beta_j^{(k+1)} s^j$, dobivamo sljedeći oblik naše težinske metode najmanjih kvadrata:

$$\|\Delta^{(k)}(By^{(k+1)} - h)\|_2 \rightarrow \min, \quad (5.2.2)$$

gdje je $y^{(k+1)} = [\alpha_0^{(k+1)} \alpha_1^{(k+1)} \dots \alpha_{r-1}^{(k+1)} \beta_1^{(k+1)} \beta_2^{(k+1)} \dots \beta_r^{(k+1)}]^T$ vektor nepoznanica koje tražimo u $(k+1)$ -voj iteraciji, $\Delta^{(k)} = \text{diag}(\frac{1}{|d^{(k)}(\xi_j)|^2})_{j=1}^l$ je težinska funkcija dobivena iz prethodne iteracije, $h = [H(\xi_1)H(\xi_2) \dots H(\xi_l)]^T$ je vektor s egzaktnim, poznatim vrijednostima funkcije H koju aproksimiramo, te

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{r-1} & -H(\xi_1)\xi_1 & -H(\xi_1)\xi_1^2 & \dots & -H(\xi_1)\xi_1^r \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{r-1} & -H(\xi_2)\xi_2 & -H(\xi_2)\xi_2^2 & \dots & -H(\xi_2)\xi_2^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \xi_{l-1} & \xi_{l-1}^2 & \dots & \xi_{l-1}^{r-1} & -H(\xi_{l-1})\xi_{l-1} & -H(\xi_{l-1})\xi_{l-1}^2 & \dots & -H(\xi_{l-1})\xi_{l-1}^r \\ 1 & \xi_l & \xi_l^2 & \dots & \xi_l^{r-1} & -H(\xi_l)\xi_l & -H(\xi_l)\xi_l^2 & \dots & -H(\xi_l)\xi_l^r \end{bmatrix}$$

matrica sustava. Vektor $y^{(k)}$ sadrži koeficijente polinoma $\{\alpha_i^{(k)}\}_{i=0}^{r-1}$, $\{\beta_j^{(k)}\}_{j=1}^r$, redom za brojnik $n^{(k)}(s)$ te nazivnik $d^{(k)}(s)$, kao u (5.1.2).

Vidjeli smo jedan način prikaza aproksimacijske racionalne funkcije $H_r(s)$, no primijetimo da u matrici B računamo puno potencija od točaka $\xi_i, i = 1, \dots, l$. To često može

biti problematično, pogotovo ako točke ξ_i imaju male vrijednosti. Može se dogoditi da se previše približimo nul-vrijednostima i da račun postane netočan pri uzastopnom potenciranju jako malih vrijednosti. Problem je i računanje inverza takve matrice. Zbog numerike je zgodnije prikazati polinome $n(s)$ i $d(s)$ u baricentričkim koordinatama (Lagrangeov interpolacijski polinom), što će pojednostaviti elemente matrice B , a stoga dati i točnije rješenje.

Izrazit ćemo brojnik $n(s)$ i nazivnik $d(s)$ u Lagrangeovoj interpolacijskoj bazi. Prisjetimo se, Lagrangeova interpolacijska baza je skup polinoma $p_1(x), p_2(x), \dots, p_l(x)$, gdje je $x = x_1, x_2, \dots, x_l, x_i \neq x_j$. Bazni polinomi $p_k, k = 1, \dots, l$ su međusobno okomiti u smislu da su u točki x_i svi bazni polinomi jednaki nuli, osim pripadnog polinoma p_i , gdje vrijedi $p_i(x_i) = 1$. Dakle, $p_i(x_j) = 0$, za $i \neq j$. Odaberimo proizvoljan skup međusobno različitih skalara $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ i definirajmo nodalni polinom $w_r(s) = \prod_{k=1}^r (s - \lambda_k)$. U ovim terminima brojnik i nazivnik od H_r , redom $n(s)$ i $d(s)$ kao ranije, postaju

$$n(s) = w_r(s) \sum_{j=1}^r \frac{w_j n(\lambda_j)}{s - \lambda_j}; \quad d(s) = w_r(s) \left(\alpha + \sum_{j=1}^r \frac{w_j d(\lambda_j)}{s - \lambda_j} \right)$$

gdje je $w_j = \frac{1}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)}$, $\alpha = \frac{d(\lambda_0)}{w_r(\lambda_0)} - \sum_{j=1}^r \frac{d(\lambda_j) w_j}{\lambda_0 - \lambda_j}$. Ovako definirani w_j i α redom osiguravaju interpolaciju od $H_r(s)$ u točki $s = \lambda_j$ te u točki $s = \lambda_0$. Uočimo da je $\alpha \neq 0$ dokle god je $d(s)$ polinomijalnog oblika. Stoga možemo definirati $\phi_j = \frac{w_j}{\alpha} n(\lambda_j)$ i $\varphi_j = \frac{w_j}{\alpha} d(\lambda_j)$, te njihovim uvrštavanjem u prethodno definirane $n(s)$ i $d(s)$ dobivamo sljedeću formulu za $H_r(s)$:

$$H_r(s) = \frac{\tilde{n}(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{\sum_{j=1}^r \frac{\phi_j}{s - \lambda_j}}{1 + \sum_{j=1}^r \frac{\varphi_j}{s - \lambda_j}}. \quad (5.2.3)$$

Sada u svakom koraku SK iteracije (5.2.1), računamo ϕ_j i φ_j kao što smo ranije računali $\{\alpha_i\}_{i=0}^{r-1}$ i $\{\beta_i\}_{i=1}^r$ u svakoj iteraciji. Dakle, za zadane interpolacijske točke $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, ulazne vrijednosti sustava ξ_1, \dots, ξ_l , izlazne vrijednosti $H(\xi_1), \dots, H(\xi_l)$, u k -tom koraku SK iteracije rješavamo težinski problem najmanjih kvadrata

$$\|\Delta^{(k)}(Ax^{(k+1)} - h)\|_2 \rightarrow \min \quad (5.2.4)$$

za funkciju $H_r^k(s) = \frac{\tilde{n}^k(s)}{\tilde{d}^k(s)}$, gdje je

$$\tilde{n}^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^r \frac{\phi_j^{(k)}}{s - \lambda_j}; \quad \tilde{d}^{(k)}(s) = 1 + \sum_{j=1}^r \frac{\varphi_j^{(k)}}{s - \lambda_j}. \quad (5.2.5)$$

Vektor nepoznanica dan je sa

$$x^{(k+1)} = [\phi_1^{(k+1)} \phi_2^{(k+1)} \dots \phi_r^{(k+1)} \varphi_1^{(k+1)} \varphi_2^{(k+1)} \dots \varphi_r^{(k+1)}]^T,$$

vektor h sadrži kao i ranije vrijednosti $H(\xi_i)$, $i = 1, \dots, l$,

$\Delta^{(k)} = \text{diag}(\frac{1}{|d^{(k)}(\xi_j)|})_{j=1}^l$, a matrica A je oblika

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi_1 - \lambda_1} & \frac{1}{\xi_1 - \lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\xi_1 - \lambda_r} & \frac{-H(\xi_1)}{\xi_1 - \lambda_1} & \frac{-H(\xi_1)}{\xi_1 - \lambda_2} & \cdots & \frac{-H(\xi_1)}{\xi_1 - \lambda_r} \\ \frac{1}{\xi_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\xi_2 - \lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\xi_2 - \lambda_r} & \frac{-H(\xi_2)}{\xi_2 - \lambda_1} & \frac{-H(\xi_2)}{\xi_2 - \lambda_2} & \cdots & \frac{-H(\xi_2)}{\xi_2 - \lambda_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\xi_{l-1} - \lambda_1} & \frac{1}{\xi_{l-1} - \lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\xi_{l-1} - \lambda_r} & \frac{-H(\xi_{l-1})}{\xi_{l-1} - \lambda_1} & \frac{-H(\xi_{l-1})}{\xi_{l-1} - \lambda_2} & \cdots & \frac{-H(\xi_{l-1})}{\xi_{l-1} - \lambda_r} \\ \frac{1}{\xi_l - \lambda_1} & \frac{1}{\xi_l - \lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\xi_l - \lambda_r} & \frac{-H(\xi_l)}{\xi_l - \lambda_1} & \frac{-H(\xi_l)}{\xi_l - \lambda_2} & \cdots & \frac{-H(\xi_l)}{\xi_l - \lambda_r} \end{bmatrix}. \quad (5.2.6)$$

Spomenimo da su navedene dvije reprezentacije- polinomijalna i baricentrička- ekvivalentne. Detalji o ekvivalentnosti mogu se pronaći u [3].

Iz (5.2.4) vidimo da se težinski faktori $\Delta^{(k)} = \text{diag}(\frac{1}{|d^{(k)}(\xi_j)|})_{j=1}^l$ u svakom koraku iteracije mijenjaju, odnosno mijenja se nazivnik aproksimacijske racionalne funkcije $H_r(s)$, a tu se nalaze polovi od $H_r(s)$. U poglavlju o stabilnosti dinamičkog sustava pokazali smo da je sustav stabilan ako i samo ako se svaki pol funkcije prijelaza $H(s)$ nalazi s lijeve strane kompleksne poluravnine, odnosno ima negativan realni dio. Kako se polovi od H_r u svakoj iteraciji mijenjaju, potrebno je voditi računa o stabilnosti sustava. O tome ćemo detaljnije reći u 5.4.

5.3 Vector fitting iteracije (VF)

Metoda vector fitting evoluirala je iz SK iterativne metode. Glavna razlika ovdje uvedena jest da u svakoj iteraciji možemo mijenjati interpolacijske točke λ_j , $j = 1, \dots, r$, budući da baricentričke koordinate nisu jedinstvene. Bitna prednost ovakvog pristupa, uz dobro odabrane α_j u svakoj iteraciji, jest brža konvergencija metode.

Interpolacijske točke ćemo sada označavati sa $\lambda_j^{(k)}$, budući da se mijenjaju u svakoj iteraciji k . Kako nam te točke ulaze u matricu A definiranu u (5.2.6), matrica će se također mijenjati kroz iteracije pa ćemo i nju označiti sa $A^{(k)} \equiv A(\lambda^{(k)})$. Elementi matrice $A^{(k)}$ su definirani kao i ranije u (5.2.6), samo umjesto λ_j stavimo $\lambda_j^{(k)}$.

Ponovimo, u svakoj novoj iteraciji mijenjamo $\lambda_j^{(k)}$, zbog čega se mijenja nazivnik (polovi) od $H_r^{(k)}$. Polovi od $H_r^{(k)}$ su nultočke nazivnika od $H_r^{(k)}$, odnosno nultočke od $\tilde{d}^{(k)}$, čije su vrijednosti upravo $\lambda_j^{(k+1)}$. Zapišimo to:

$$\tilde{d}^{(k)}(s) = 1 + \sum_{j=1}^r \frac{\varphi_j^{(k)}}{s - \lambda_j^{(k)}} = \frac{\prod_{j=1}^r (s - \lambda_j^{(k+1)})}{\prod_{j=1}^r (s - \lambda_j^{(k)})}. \quad (5.3.1)$$

Sada minimizacijski problem (5.2.4) možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
 \|\Delta^{(k)}(A^{(k)}x^{(k+1)} - h)\|_2^2 &= \\
 &= \sum_{i=1}^l \frac{1}{|\tilde{d}^{(k)}(\xi_i)|^2} \left| \sum_{j=1}^r \frac{\phi_j^{(k+1)}}{\xi_i - \lambda_j^{(k)}} - H(\xi_i) \left(1 + \sum_{j=1}^r \frac{\varphi_j^{(k+1)}}{\xi_i - \lambda_j^{(k)}} \right) \right|^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^l \left| \frac{\prod_{j=1}^r (\xi_i - \lambda_j^{(k)})}{\prod_{j=1}^r (\xi_i - \lambda_j^{(k+1)})} \right|^2 \left| \frac{\tilde{p}^{(k+1)}(\xi_i)}{\prod_{j=1}^r (\xi_i - \lambda_j^{(k)})} - H(\xi_i) \frac{\tilde{q}^{(k+1)}(\xi_i)}{\prod_{j=1}^r (\xi_i - \lambda_j^{(k)})} \right|^2,
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

gdje je $\tilde{p}^{(k+1)}$ polinom stupnja $r - 1$ koji smo dobili raspisom sume razlomaka $\sum_{j=1}^r \frac{\phi_j^{(k+1)}}{\xi_i - \lambda_j^{(k)}}$, a $\tilde{q}^{(k+1)}$ je polinom stupnja r koji smo dobili raspisom sume $1 + \sum_{j=1}^r \frac{\varphi_j^{(k+1)}}{\xi_i - \lambda_j^{(k)}}$. Pokratimo sada u razlomcima produkte sa članovima $\lambda_j^{(k)}$ te vratimo zapis u termine suma parcijalnih razlomaka:

$$\begin{aligned}
 \|\Delta^{(k)}(A^{(k)}x^{(k+1)} - h)\|_2^2 &= \\
 &= \sum_{i=1}^l \left| \frac{\tilde{p}^{(k+1)}(\xi_i)}{\prod_{j=1}^r (\xi_i - \lambda_j^{(k+1)})} - H(\xi_i) \frac{\tilde{q}^{(k+1)}(\xi_i)}{\prod_{j=1}^r (\xi_i - \lambda_j^{(k+1)})} \right|^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^l \left| \sum_{j=1}^r \frac{\tilde{\phi}_j^{(k+1)}}{\xi_i - \lambda_j^{(k+1)}} - H(\xi_i) \left(1 + \sum_{j=1}^r \frac{\tilde{\varphi}_j^{(k+1)}}{\xi_i - \lambda_j^{(k+1)}} \right) \right|^2 = \\
 &= \|A^{(k+1)}\tilde{x}^{(k+1)} - h\|_2^2,
 \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

gdje je $\tilde{x}^{(k+1)} = [\tilde{\phi}_1^{(k+1)} \tilde{\phi}_2^{(k+1)} \dots \tilde{\phi}_r^{(k+1)} \tilde{\varphi}_1^{(k+1)} \tilde{\varphi}_2^{(k+1)} \dots \tilde{\varphi}_r^{(k+1)}]^T$, a $\tilde{\phi}_j^{(k+1)}$ i $\tilde{\varphi}_j^{(k+1)}$ su varijable dobivene iz raspisa produkta razlomaka na parcijalne sume razlomaka. Te varijable su naravno nepoznanice $(k + 1)$ -ve iteracije i dobit ćemo ih kao rješenje sustava (5.3.3) u vektoru $\tilde{x}^{(k+1)}$. Dakle, jedan korak metode vector fitting odgovara rješavanju problema najmanjih kvadrata oblika

$$\|A^{(k+1)}\tilde{x}^{(k+1)} - h\|^2 \rightarrow \min, k = 0, 1, 2, \dots \tag{5.3.4}$$

Iterativna metoda vector fitting se svodi na rješavanje linearnog sustava $A^{(k+1)}\tilde{x}^{(k+1)} = h$ metodom najmanjih kvadrata s jediničnim težinama. Što smo pokazali prethodnim formulama? U (5.3.4) imamo prikaz metode najmanjih kvadrata za pripadni problem. U prethodnim formulama smo zapravo rekli da su λ_j^{k+1} nultočke od $\tilde{d}^{(k)}(s)$, a polovi od $\tilde{d}^{(k+1)}(s)$ su nultočke od $\tilde{d}^{(k)}(s)$. Iz toga očekujemo da će se polovi i nultočke pokratiti, te da ćemo dobiti problem najmanjih kvadrata s jediničnim težinama. U praksi ponekad ne dobivamo željene rezultate budući da je s teorijske strane pitanje konvergencije ove metode još uvijek otvoren problem.

5.4 Realokacija nestabilnih polova

Kod stabilnosti dinamičkog sustava spomenuli smo da je za samu stabilnost potrebno da se polovi funkcije prijelaza $H(s)$ nalaze s lijeve strane kompleksne poluravnine, odnosno da imaju negativan realni dio. Kako smo vidjeli, polovi se u svakoj iteraciji mijenjaju te se može dogoditi da u novoj iteraciji dobijemo pol koji ima pozitivan realni dio. Tu nastupaju problemi sa stabilnošću našeg dinamičkog sustava i kao rješenje možemo dobiti jako lošu aproksimaciju, ili ju ne dobiti uopće. Na sreću, postoji vrlo jednostavno rješenje tog problema- samo promijenimo predznak realnog dijela onom polu kojem je realni dio pozitivan. Dalje nastavimo sa iteracijama vector fittinga s novim polovima kao da ništa nismo mijenjali. U [3] se može naći nešto više o ekvivalentnosti takvih iteracija. Dakle, prebacivanjem polova sa desne strane kompleksne poluravnine na lijevu stranu nismo poremetili kvalitetu i točnost naših iteracija. Takav postupak zovemo zrcaljenje nestabilnih polova ili **realokacija polova**.

Neka je $\frac{\tilde{n}^{(k)}(s)}{\tilde{d}^{(k)}(s)}$ trenutna aproksimacija, neka su $\lambda_j^{(k+1)}$ nultočke od $\tilde{d}^{(k)}$, te neka su $\lambda_{j_t}^{(k+1)}$ oni polovi koji se nalaze u desnoj kompleksnoj poluravnini, odnosno imaju pozitivan realni dio. Pretpostavimo da takvih polova ima p , stoga $t = 1, \dots, p$, $p < r$. Sada zamijenimo polove $\lambda_{j_t}^{(k+1)}$ sa $-\lambda_{j_t}^{(k+1)}$, a ostale ostavimo kako su bili. Označimo sada taj novi skup polova sa $\hat{\lambda}_j^{(k+1)}$, gdje je $\hat{\lambda}_t^{(k+1)} = -\lambda_{j_t}^{(k+1)}$, $t = 1, \dots, p$. Neka je $\frac{\hat{n}^{(k)}}{\hat{d}^{(k)}}$ baricentrička reprezentacija koja odgovara čvorovima $\lambda_j^{(k+1)}$. Sada metoda vector fitting rješava problem najmanjih kvadrata

$$\|A(\hat{\lambda}^{(k+1)} \hat{x}^{(k+1)}) - h\|_2 \rightarrow \min.$$

Poglavlje 6

Implementacija metode i prikaz rezultata

U ovom poglavlju prikazat ćemo neke rezultate prethodno opisanog algoritma u programskom paketu MATLAB. Konkretni detalji o algoritmu mogu se naći u [5], [4] i [2]. U prethodnim poglavljima smo razmatrali kako naći aproksimaciju $H_r(s)$ funkcije prijelaza $H(s)$. Sada ćemo na konkretnim primjerima pokazati koliko dobro naša numerička metoda aproksimira $H(s)$.

6.1 Greška aproksimacije

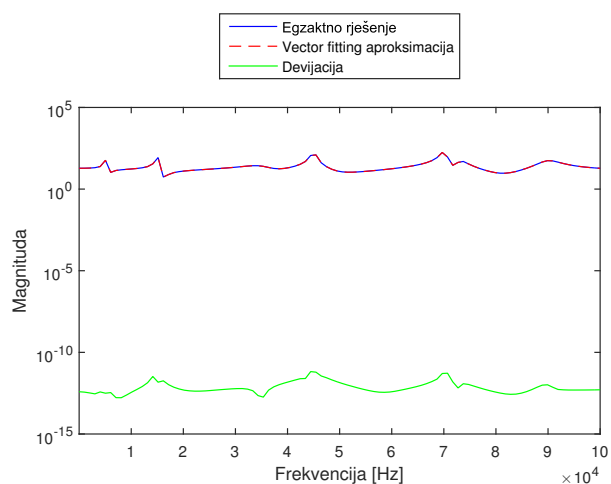
Novi pojam ovdje bit će *root-mean-square error*, odnosno *rms error*. To je veličina koja nam govori koliko blizu se naša aproksimacija nalazi egzaktnom rješenju. Računa se kao drugi korijen aritmetičke sredine kvadrata razlika egzaktnog i aproksimativnog rješenja. Neka nam je poznata funkcija prijelaza $H(s)$. Odaberimo niz od N podataka $H(\xi_1)$, $H(\xi_2)$, ..., $H(\xi_N)$. Neka je $H_r(s)$ aproksimacija od $H(s)$ dobivena našom numeričkom metodom, $s = (\xi_i)_{i=1}^N$. Formula za grešku aproksimacije, odnosno rms error je oblika

$$rms = \sqrt{\frac{[H(\xi_1) - H_r(\xi_1)]^2 + [H(\xi_2) - H_r(\xi_2)]^2 + \cdots + [H(\xi_N) - H_r(\xi_N)]^2}{N}}$$

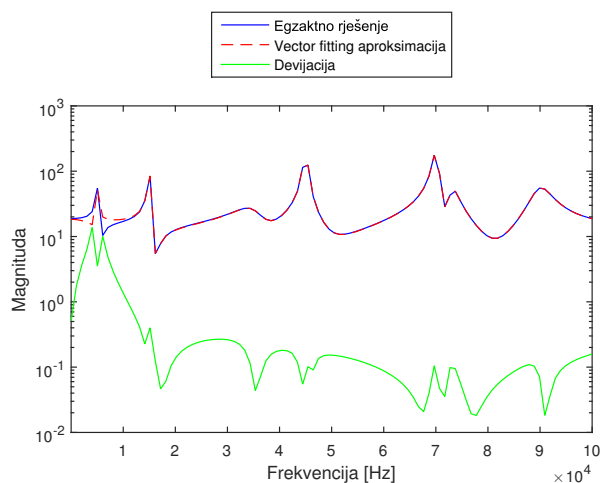
Zadajmo polove i reziduale kao u tablici 6.1. Vidimo da svi početni polovi imaju negativan realni dio, što je teorijski u redu. Ispod tablice se nalazi pripadni Bode plot. Problem smo rješavali sa tri iteracije i dobili grešku (root-mean-square error) $rms = 0.1554E - 11$.

Tablica 6.1

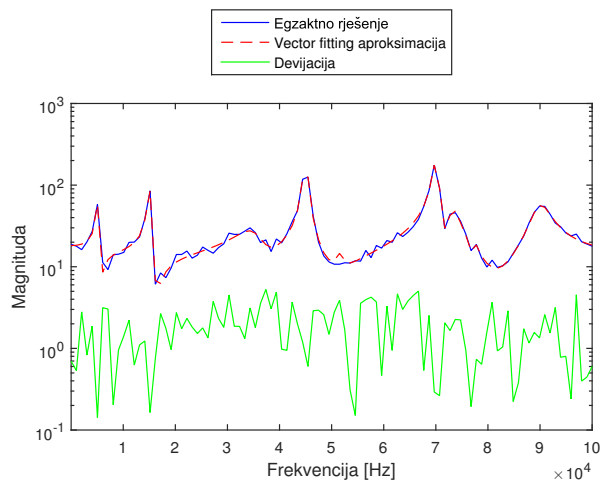
polovi	reziduali
-4500	-3000
-41000	-83000
$-100 \pm 5000j$	$-5 \pm 7000j$
$-120 \pm 15000j$	$-20 \pm 18000j$
$-3000 \pm 35000j$	$6000 \pm 45000j$
$-200 \pm 45000j$	$40 \pm 60000j$
$-2000 \pm 90000j$	$-5000 \pm 92000j$
$-1500 \pm 45000j$	$90 \pm 10000j$
$-500 \pm 70000j$	$50000 \pm 80000j$
$-1000 \pm 73000j$	$1000 \pm 45000j$



Ako pokvarimo svojstvo da su svi polovi u lijevoj poluravnini i zamijenimo polove $-100 \pm 5000j$ sa $100 \pm 5000j$, te nadalje ne zrcalimo dobivene nepoželjne polove, sa tri iteracije dobit ćemo grešku aproksimacije $rms = 1.9970$ što je jako velika greška. Na idućoj slici možemo vidjeti da je aproksimacija najnetočnija upravo na tome dijelu gdje smo poremetili svojstvo stabilnosti polova, odnosno stabilnosti pripadnog dinamičkog sustava.



Pogledajmo sada što se događa kada na aproksimacijsku funkciju $H_r(s)$ definiranu kao u (5.2.3) dodamo šum, odnosno kada pokvarimo aproksimaciju u svakoj iteraciji dodavanjem proizvoljne vrijednosti funkciji $H_r(s)$. Funkciji ćemo dodati random vrijednosti u intervalu $(-5, 5)$. Na sljedećem Bode plotu vidimo što se dogodi u 500 iteracija kada ubacimo šum- greška je prilično velika. Uzmimo ipak u obzir da greška šuma korištenog za ovaj prikaz iznosi $RMS\ noise = 2.6558$, dok greška aproksimacije iznosi $rms = 2.3623$. Koristili smo skup polova i reziduala iz tablice 6.1.



Bibliografija

- [1] Biswa Nath Datta, *Numerical methods for linear control systems- Design and Analysis*, Academic Press, 2003.
- [2] D. Deschrijver, M. Mrozowski, T. Dhaene i D. De Zutter, *Macromodeling of Multiport Systems Using a Fast Implementation of the Vector Fitting Method*, IEEE Microwave and Wireless Components Letters **18** (2008), br. 6, 383–385.
- [3] Z. Drmač, S. Gugercin i C. Beattie, *Quadrature- based vector fitting: Implications for H_2 system approximation*, (2014), <https://arxiv.org/abs/1403.4655>.
- [4] B. Gustavsen, *Improving the pole relocating properties of vector fitting*, IEEE Trans. Power Delivery **21** (2006), br. 3, 1587–1592.
- [5] B. Gustavsen i A. Semlyen, *Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting*, IEEE Transactions on Power Delivery **14** (1999), br. 3, 1052–1061.
- [6] S. Kurepa i H. Kraljević, *Matematička analiza funkcija kompleksne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.
- [7] G. Muić i M. Primc, *Vektorski prostori, skripta*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/~gmuic/predavanja/vp.pdf>, posjećena 12.06.2016.

Sažetak

U ovom radu, proučavali smo kako modelirati analitički dinamički sustav u frekvencijskoj domeni. To nam je bilo od interesa jer s algebarskim jednadžbama možemo računati na ograničenoj aritmetici računala. Kao pomoćni alat tu nam je poslužila Laplaceova transformacija. Pomoću nje smo dobili funkciju prijelaza koja je od velike važnosti za interpretaciju rezultata početnog sustava diferencijalnih jednadžbi u frekvencijskoj domeni. Definirali smo što je to dinamički sustav, njegova važna svojstva, te vidjeli primjere iz fizikalnog svijeta gdje se dinamički sustav koristi. Na kraju smo opisali iterativnu numeričku metodu vector fitting. Njome aproksimiramo funkciju prijelaza u smislu najmanjih kvadrata. Prikazali smo neke rezultate u programskom paketu MATLAB.

Summary

In this thesis, we studied how to model analytical dynamical system in frequency domain. That was of our interest because with the algebraic equations we can easily do the computing on a limited computer arithmetic. Laplace transform was helpful auxiliary tool for that purpose. With it, we get the transfer function which is of great importance for the interpretation of the results of initial system of differential equations in frequency domain. We defined what dynamical system is, its important characteristics, and we saw examples from the physical world where dynamical system is used. Finally, we described the iterative numerical method named vector fitting. It approximates transfer function in the least square fit. We show some results in software package MATLAB.

Životopis

Rođena sam u Virovitici 14.09.1988. godine. Tamo sam pohađala osnovnu školu, te Gimnaziju Petra Preradovića u koju sam krenula 2003. godine. Nakon završene srednje škole, 2007. godine sam upisala preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka tog studija, 2012. godine upisala sam diplomski studij primijenjene matematike na spomenutom fakultetu.